Entwicklung der Integralformel $\int x^{f-1}\, dx (lnx)^{\frac{m}{n}}$ nach Erstreckung der Integration vom Wert $x = 0$ bis zu $x = 1$ *

Leonhard Euler

Theorem 1

§111 Wenn n irgendeine ganze positive Zahl bezeichnet und die Integration der Formel

$$\int x^{f-1}\, dx (1 - x^g)^n$$

vom Wert $x = 0$ bis hin zu $x = 1$ erstreckt wird, wird ihr Wert sein

$$= \frac{g^n}{f} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{(f+g)(f+2g)(f+3g)\ldots(f+ng)}$$

.

Beweis

*Originatitel: Evolutio formulae integralis $\int x^{f-1}\, dx (lnx)^{\frac{m}{n}}$ a valore $x = 0$ ad $x = 1$ extensa, erstmals publiziert in Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 16, 1772, pp. 91-139 , Nachdruck in Opera Omnia: Series 1, Volume 17, pp. 316 - 357, eine Version veröffentlicht in Institutiones calculi integralis 4, 1845, pp. 78-121 [E421b] , Eneström-Nummer E 421, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Johanna Trick, im Rahmen des Hauptseminars Euler, Sommersemester 2015, JGU Mainz

Es ist bekannt, dass im Allgemeinen die Integration der Formel $\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^m$ auf die Integration von dieser $\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{m-1}$ zurückgeführt werden kann, weil es ja möglich ist, konstante Größen A und B so zu bestimmen, dass wird

$$\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^m = A\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{m-1} + Bfx^f(1-x^g)^m$$

nachdem nämlich Differentiale genommen worden sind, geht diese Gleichung hervor

$$\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^m = Ax^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{m-1} + Bfx^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^m - Bmgx^{f+g-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{m-1}$$

damit diese Gleichung bestehen kann, ist es von Nöten, dass ist

$$1 = B(f+mg) \ \text{ und } \qquad A = Bmg$$

woher wir berechnen

$$B = \frac{1}{f+mg} \quad \text{und} \qquad A = \frac{mg}{f+mg}$$

Deswegen werden wir die folgende allgemeine Reduktion haben

$$\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^m = \frac{mg}{f+mg}\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{m-1} + \frac{1}{f+mg}x^f(1-x^g)^m$$

weil diese nach Setzen von $x = 0$ verschwindet, wenn freilich $f > 0$ ist, ist Addition einer Konstante nicht von Nöten. Daher, nachdem jedes der beiden Integrale bis hinzu $x = 1$ erstreckt worden ist, verschwindet der letzte Teil des Integrals von selbst und es wird für den Fall $x = 1$ sein

$$\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^m = \frac{mg}{f+mg} - \int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{m-1}$$

Weil also nach Nehmen von $m = 1$ ist

$$\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^0 = \frac{1}{f}x^f = \frac{1}{f}$$

nachdem $x = 1$ gesetzt worden ist, erhalten wir für denselben Fall $x = 1$ die folgenden Werte

$$\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^1 = \frac{g}{f}\cdot\frac{1}{f+g}$$
$$\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^2 = \frac{g^2}{f}\cdot\frac{1}{f+g}\cdot\frac{2}{f+2g}$$
$$\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^3 = \frac{g^3}{f}\cdot\frac{1}{f+g}\cdot\frac{2}{f+2g}\cdot\frac{3}{f+3g}$$

und daher schließen wir für irgendeine ganze positive Zahl n, dass sein wird

$$\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^n = \frac{g^n}{f}\cdot\frac{1}{f+g}\cdot\frac{2}{f+2g}\cdot\frac{3}{f+3g}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{f+ng}$$

wenn nur die Zahlen f und g positive Zahlen sind.

Korollar 1

§211 Daher kann also umgekehrt der Wert eines aus wie vielen Faktoren auch immer gebildeten Produktes durch eine Integralformel ausgedrückt werden, sodass ist

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{(f+g)(f+2g)(f+3g)\ldots(f+ng)}=\frac{f}{g^n}\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^n$$

nachdem dieses Integral vom Wert $x=0$ bis hin zu $x=1$ erstreckt worden ist.

Korollar 2

§311 Wenn man daher also eine Progression von dieser Art
$\frac{1}{f+g}\ \frac{1\cdot 2}{(f+g)(f+2g)}\ \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(f+g)(f+2g)(f+3g)}\ \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(f+g)(f+2g)(f+3g)(f+4g)}$ etc.
wird ihr allgemeiner Term, der dem unbestimmten Index n entspricht, bequem mit dieser Integralformel $\frac{f}{g^n}\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^n$ dargestellt, mit deren Hilfe die Progression interpoliert und ihre gebrochenen Indizes entsprechende Terme dargeboten werden können.

Korollar 3

§411 Wenn wir anstelle von n $n-1$ schreiben, werden wir haben

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)}{(f+g)(f+2g)(f+3g)\ldots(f+(n-1)g)}=\frac{f}{g^{n-1}}\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1}$$

welche mit $\frac{n}{f+ng}$ multipliziert liefert

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{(f+g)(f+2g)(f+3g)\ldots(f+ng)}=\frac{f\cdot ng}{g^n(f+ng)}\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1}$$

Bemerkung 1

§511 Es wäre möglich gewesen, diese letzte Formel unmittelbar aus der vorhergehenden abzuleiten, weil wir gerade bewiesen haben, dass ist

$$\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^n = \frac{ng}{f+ng}\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1}$$

Wenn freilich jedes der beiden Integrale vom Wert $x=0$ bis hin zum Wert $x=1$ erstreckt wird; es ist von Nöten, dass diese Bestimmung der Integrale im Folgenden überall verstanden wird. Des Weiteren ist auch immer festzuhalten, dass die Größen f und g positiv sind, welche Bedingung natürlich angeführter Beweis absolut erfordert. Was aber die Zahl n angeht, sofern mit ihr der Index eines gewissen Termes der Progression (§3) bezeichnet wird, steht nichts im Wege, dass mit ihr irgendwelche entweder positive oder negative Zahlen gekennzeichnet werden, weil ja auch negativen Indizes entsprechende Terme ihrer Progression durch die gegebene Integralformel dargeboten zu werden, abgesehen werden. Dennoch ist indes aufmerksam festzuhalten, dass diese Reduktion

$$\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^m = \frac{mg}{f+mg}\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{m-1}$$

nicht der Wahrheit verträglich ist, wenn nicht $m>0$ ist, weil andernfalls der algebraische Anteil $\frac{1}{f+mg}x^f(1-x^g)^m$ nicht verschwände, nachdem $x=1$ gesetzt worden ist.

Bemerkung 2

§611 Reihen von dieser Art, welche sich transzendent nennen lassen, weil die den gebrochenen Indizes entsprechenden Terme transzendente Größen sind, bin ich schon einst in "Comment. Petrop. Torso V"gründlicher nachgegangen; daher werde ich an dieser Stelle nicht so diese Progressionen wie außerordentliche Vergleiche von Integralformeln, die daher deriviert werden, sorgsamer untersuchen. Nachdem ich natürlich gezeigt hatte, dass der Wert dieses unbestimmten Produktes $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ mit dieser von $x=0$ bis $x=1$ erstreckten Integralformel ausgedrückt wird, welche Sache, sooft n eine ganze positive Zahl ist, durch Integration selbst offenbar ist, habe ich die Fälle einer Untersuchung unterworfen, in denen für n gebrochene Zahlen angenommen werden; dort tritt es freilich aus der Integralformel selbst keinesfalls klar zutage, zu welchem Geschlecht von transzendenten Größen diese Terme gezählt werden müssen. Aber mit einem einzigartigen Kunstgriff habe ich dieselben Terme auf bekannte Quadraturen zurückgeführt, was deshalb im höchsten Maße würdig scheint, dass es mit größerem Eifer erwägt wird.

Problem 1

§711 Nachdem bewiesen worden ist zu sein

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n}{(f+g)(f+2g)(f+3g)...(f+ng)} = \frac{f}{g^n} \int x^{f-1} \,\mathrm{dx}(1-x^g)^n$$

nachdem das Integral von $x = 0$ bis $x = 1$ erstreckt worden ist, den Wert desselben Produktes im Fall, indem $g = 0$ ist, durch eine Inegralformel anzugeben.

Lösung

Nach Setzen von $g = 0$ verschwindet in der Inegralfomel das Glied $(1-x^g)^n$, zugleich aber auch der Nenner g^n, woher die Frage darauf zurückgeht, dass der Wert des Bruches $\frac{(1-x^g)^n}{g^n}$ im Fall $g = 0$ bestimmt wird, in welchem so der Zähler wie der Nenner verschwindet. Für dieses Ziel werde g wie eine unendliche kleine Größe angesehen, und weil $x^g = e^{glnx}$ ist, wird $x^g = 1 + glnx$ und daher $(1-x^g)^n = g^n(-lnx)^n = g^n(ln\frac{1}{x})^n$ werden; daher geht für diesen Fall unsere Integralformel in $f \int x^{f-1} \,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^n$, sodass man nun hat

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n}{f^n} = f \int x^{f-1} \,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^n$$

oder

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = f^{n+1} \int x^{f-1} \,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^n$$

Korollar 1

§811 Sooft n eine ganze positive Zahl ist, gelingt die Integration der Formel $\int x^{f-1} \,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^n$ und, nachdem sie von $x = 0$ bis $x = 1$ erstreckt worden ist, geht tatsächlich das Produkt hervor, welchem wir diese Formel gleich gefunden haben. Wenn aber für n gebrochene Zahlen genommen werden, wird dieselbe Integralformel zum Interpolieren dieser hypergeometrischen Progression dienen

$$1, 1 \cdot 2, 1 \cdot 2 \cdot 3, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \text{ etc.}$$

oder

$$1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040 \text{ etc.}$$

Korollar 2

§911 Wenn der gerade gefundene Ausdruck durch den wesentlichen dividiert wird, wird ein Produkt entspringen, dessen Faktoren in irgendeiner arithmetischen Progression fortschreiten,

$$(f+g)(f+2g)(f+3g)...(f+ng) = f^n g^n \frac{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^n}{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^n}$$

deren Werte es also auch, wenn n eine gebrochene Zahl ist, möglich sein wird, daher anzugeben.

Korollar 3

§1011 Weil ist

$$\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^n = \frac{ng}{f+ng}\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1}$$

wird auch auf die gleiche Weise für den Fall $g = 0$ sein

$$\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^n = \frac{n}{f}\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{n-1}$$

und daher durch diese anderen Integralformeln

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = nf^n \int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{n-1}$$

$$(f+g)(f+2g)...(f+ng) = f^{n-1}g^{n-1}(f+ng)\frac{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{n-1}}{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1}}$$

Bemerkung

§1111 Weil wir gefunden haben zu sein

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = f^{n+1} \int x^{f-1} \, \mathrm{dx} (ln\frac{1}{x})^{n-1}$$

tritt klar zutage, dass diese Integralformel nicht von dem Wert der Größe f abhängt, was auch leicht erkannt wird, indem $x^f = y$ gesetzt wird, woher wird

$$fx^{f-1} = dy \text{ und } \qquad ln\frac{1}{x} = -lnx = -\frac{1}{f}lny = \frac{1}{f}ln\frac{1}{y}$$

und daher

$$f^n(ln\frac{1}{x})^n = (ln\frac{1}{y})^n$$

sodass ist

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \int dy(ln\frac{1}{n})^n$$

welche Formel aus der ersten entsteht, indem $f = 1$ gesetzt wird. Für die Interpolation wird also die ganze Aufgabe von Formeln dieser Art darauf zurückgeführt, dass die Werte dieser Integralformel $\int \, \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^n$ bestimmt werden, wann immer der Exponent n eine gebrochene Zahl ist. Wie wenn beispielsweise $n = \frac{1}{2}$ ist, ist es von Nöten, dass der Wert dieser Integralformel $\int \, \mathrm{dx}\sqrt{ln\frac{1}{x}}$ angegeben wird, welchen ich schon einst gezeigt habe, $= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ zu sein, wähnend π die Peripherie des Kreises bezeichnet, dessen Durchmesser $=$ 1 ist; für andere gebrochene Zahlen habe ich aber ihren Wert auf Quadraturen algebraischer Kurven höberer Ordnung zurückzuführen gelehrt. Weil diese Reduktion keineswegs offensichtlich ist und nur dann Geltung hat, wann immer die Integration der Formel $\int \, \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^n$ vom Wert $x = 0$ bis $x = 1$ erstreckt wird, scheint sie besonderer Aufmerksamkeit würdig. Auch wenn ich aber diesen Gegenstand schon einst behandelt habe, habe ich dennoch, weil ich durch viele Umwege hindurch dorthin geführt worden bin, beschlossen, denselben hier zu resümieren und gefälliger zu entwickeln.

Theorem 2

§1211 Wenn die Integralformeln vom Wert $x = 0$ bis hin zu $x = 1$ erstreckt werden und n eine ganze Zahl bezeichnet, wird sein

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots 2n} = \frac{1}{2}ng \int x^{f+ng-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1} \frac{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1}}{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{2n-1}}$$

welche positiven Zahlen auch immer anstelle von f und g angenommen werden.

Beweis

Weil wir oben (§4) gezeigt haben, zu sein

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{(f+g)(f+2g)\ldots(f+ng)} = \frac{f \cdot ng}{g^n(f+ng)} \int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1}$$

werden wir anstelle von n $2n$ schreiben,

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2n}{(f+g)(f+2g)\ldots(f+2ng)} = \frac{f \cdot 2ng}{g^{2n}(f+2ng)} \int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{2n-1}$$

Es werde nun die erste Gleichung durch die zweite dividiert und es wird diese dritte hervorgehen

$$\frac{(f+(n+1)g)(f+(n+2)g)\ldots(f+2ng)}{(n+1)(n+2)\ldots 2n} = \frac{g^n(f+2ng)}{2(f+ng)} \cdot \frac{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1}}{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{2n-1}}$$

Aber wenn in der ersten Gleichung anstelle von f $f + ng$ geschrieben wird, wird diese vierte Gleichung entspringen

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{(f+(n+1)g)(f+(n+2)g)\ldots(f+2ng)} = \frac{(f+ng)ng}{g^n(f+2ng)} \int x^{f+ng-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1}$$

Es werde diese vierte Gleichung mit jener dritten multipliziert und es wird die zu beweisende Gleichung selbst aufgefunden werden

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots 2n} = \frac{1}{2}ng \int x^{f+ng-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1} \cdot \frac{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1}}{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{2n-1}}$$

Korollar 1

§1311 Wenn in der ersten Gleichung $f = n$ und $g = 1$ festgesetzt wird, wird dasselbe Produkt entspringen

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n}{(n+1)(n+2)...2n} = \frac{1}{2}n \int x^{n-1}\,\mathrm{d}x(1-x)^{n-1}$$

nach Vergleichen von dieser Gleichung mit jener wir erhalten

$$\frac{\int x^{n-1}\,\mathrm{d}x(1-x)^{n-1}}{g\int x^{f+ng-1}\,\mathrm{d}x(1-x^g)^{n-1}} = \frac{\int x^{f-1}\,\mathrm{d}x(1-x^g)^{n-1}}{\int x^{f-1}\,\mathrm{d}x(1-x^g)^{2n-1}}$$

Korollar 2

§1411 Wenn wir in jener Gleichung anstelle von x x^g schreiben, wird werden

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n}{(n+1)(n+2)...2n} = \frac{1}{2}ng \int x^{ng-1}\,\mathrm{d}x(1-x^g)^{n-1}$$

sodass wir nun diesen Vergleich zwischen den folgenden Integralformeln erhalten

$$\int x^{ng-1}\,\mathrm{d}x(1-x^g)^{n-1} = \int x^{f+ng-1}\,\mathrm{d}x(1-x^g)^{n-1} \cdot \frac{\int x^{f-1}\,\mathrm{d}x(1-x^g)^{n-1}}{\int x^{f-1}\,\mathrm{d}x(1-x^g)^{2n-1}}$$

Korollar 3

§1511 Wenn wir in der Gleichung des Theorems $g = 0$ setzen, werden sich wegen $(1-x^g)^m = g^m(ln\frac{1}{x})^m$ die Potenzen von g aufheben uns es wird diese Gleichung entspringen

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n}{(n+1)(n+2)...2n} = \frac{1}{2}n \int x^{f-1}\,\mathrm{d}x(ln\frac{1}{x})^{n-1} \frac{\int x^{f-1}\,\mathrm{d}x(ln\frac{1}{x})^{n-1}}{\int x^{f-1}\,\mathrm{d}x(ln\frac{1}{x})^{2n-1}}$$

woher wir erschließen

$$\frac{(\int x^{f-1}\,\mathrm{d}x(ln\frac{1}{x})^{n-1})^2}{\int x^{f-1}\,\mathrm{d}x(ln\frac{1}{x})^{2n-1}} = g \int x^{ng-1}\,\mathrm{d}x(1-x^g)^{n-1}$$

oder wegen

$$\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{n-1} = \frac{f}{n}\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{n}$$

diese

$$\frac{2f}{n}\cdot\frac{(\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{n})^2}{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{2n}} = g\int x^{ng-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1}$$

Korollar 4

§1611 Wir wollen hier $f=1$, $g=2$ und $n=\frac{m}{2}$ setzen, dass m eine ganze positive Zahl ist, und wegen

$$\int\,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^m = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m$$

wird sein

$$\frac{4}{m}\cdot\frac{\int\,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{\frac{m}{2}})^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m} = 2\int x^{m-1}\,\mathrm{dx}(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}$$

und daher

$$\int\,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{\frac{m}{2}} = \sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m\cdot\frac{m}{2}\int x^{m-1}\,\mathrm{dx}(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}}$$

und, indem $m=1$ genommen wird, wird man wegen

$$\int\frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{1-xx}} = \frac{\pi}{2}$$

haben

$$\int\,\mathrm{dx}\sqrt{ln\frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{1-xx}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Bemerkung

§1711 Betrachte und bestaune also den Beweis des einst von mir vorgelegten Theorems, dass $\int\,\mathrm{dx}\sqrt{ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ist, und diesen von der Interpolationsmethode, die ich damals benutzt hatte, freien. Er ist natürlich hier aus diesem Theorem abgeleitet, indem ich gefunden habe, zu sein

$$\frac{(\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{n-1})^2}{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{2n-1}} = g\int x^{ng-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1}$$

Aber das wesentliche Theorem, woher dieses abgeleitet worden ist, verhält sich so

$$g \cdot \frac{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1} \cdot \int x^{f+ng-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1}}{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{2n-1}} = \int x^{n-1}\,\mathrm{dx}(1-x)^{n-1}$$

denn jede der beiden Seiten wird durch von $x = 0$ bis $x = 1$ erstreckte Integration in dieses numerische Produkt entwickelt

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)}$$

Und wenn wir der einen Seite eine sich weiter erstreckende Gestalt zuteilen wollen, wird das Theorem so vorgelegt werden können, dass ist

$$g \cdot \frac{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1} \cdot \int x^{f+ng-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1}}{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{2n-1}} = k\int x^{nk-1}\,\mathrm{dx}(1-x^k)^{n-1}$$

und wenn hier $g = 0$ genommen wird, wird

$$\frac{(\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{n-1})^2}{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{2n-1}} = k\int x^{nk-1}\,\mathrm{dx}(1-x^k)^{n-1}$$

Besonders ist es also anzumerken, dass jene Gleichheit bestehen bleibt, welche Zahlen auch immer anstelle von f und g angenommen werden; im Fall $f = g$ ist sie freilich offenbar, weil ist

$$\int x^{g-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1} = \frac{(1-x^g)^n}{ng} = \frac{1}{ng}$$

es wird nämlich werden

$$2g\int x^{ng+g-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1} = k\int x^{nk-1}\,\mathrm{dx}(1-x^k)^{n-1}$$

und weil ist

$$\int x^{ng+g-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1} = \frac{1}{2}\int x^{ng-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1}$$

ist die Gleichheit ersichtlich, weil es möglich ist, k nach Belieben anzunehmen. Auf dieselbe Weise, auf die ich zu diesem Theorem gelangt bin, ist es möglich, zu anderen änlichen zu kommen.

Theorem 3

§1811 Wenn die folgenden Integralformeln vom Wert $x = 0$ bis $x = 1$ erstreckt werden und n irgendeine ganze positive Zahl bezeichnet, wird sein

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{(2n+1)(2n+2)\ldots 3n} = \frac{2}{3}ng \int x^{f+2ng-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1} \cdot \frac{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{2n-1}}{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{3n-1}}$$

welche positiven Zahlen auch immer für f und g angenommen werden.

Beweis

Im vorhergehenden Theorem haben wir schon gesehen zu sein

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2n}{(f+g)(f+2g)\ldots(f+2ng)} = \frac{f \cdot 2ng}{g^{2n}(f+2ng)} \int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{2n-1}$$

wenn wir aber auf die gleiche Weise in der wesentlichen anstelle von n $3n$ schreiben, werden wir haben

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3n}{(f+g)(f+2g)\ldots(f+3ng)} = \frac{f \cdot 3ng}{g^{3n}(f+3ng)} \int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{3n-1}$$

woher jene Gleichung durch diese geteilt hervorbringt

$$\frac{(f+(2n+1)g)(f+(2n+2)g)\ldots(f+3ng)}{(2n+1)(2n+2)\ldots 3n} = \frac{2g^n(f+3ng)}{3(f+2ng)} \cdot \frac{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{2n-1}}{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{3n-1}}$$

Aber wenn wir in der wesentlichen Gleichung (§4) anstelle von f $f + 2gn$ schreiben, erhalten wir diese Gleichung

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{(f+(2n+1)g)(f+(2n+2)g)\ldots 3n} = \frac{(f+2ng)ng}{g^n(f+3ng)} \int x^{f+2ng-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1}$$

Es werde nun diese Gleichung mit der vorhergehenden multipliziert und es wird die Gleichung selbst entspringen, die bewiesen werden muss

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{(2n+1)(2n+2)\ldots 3n} = \frac{2}{3}ng \int x^{f+2ng-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1} \cdot \frac{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{2n-1}}{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{3n-1}}$$

Korollar 1

§1911 Denselben Wert erhalten wir aus der wesentlichen Gleichung, indem $f = 2n$ und $g = 1$ gesetzt wird, sodass ist

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n}{(2n+1)(2n+2)...3n} = \frac{2}{3}n \int x^{2n-1} \, \mathrm{dx}(1-x)^{n-1}$$

welche Integralformel, indem anstelle von x x^k geschrieben wird, in diese transformiert wird

$$\frac{2}{3}nk \int x^{2nk-1} \, \mathrm{dx}(1-x^k)^{n-1}$$

sodass ist

$$g \int x^{f+2ng-1} \, \mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1} \cdot \frac{\int x^{f-1} \, \mathrm{dx}(1-x^g)^{2n-1}}{\int x^{f-1} \, \mathrm{dx}(1-x^g)^{3n-1}} = k \int x^{2nk-1} \, \mathrm{dx}(1-x^k)^{n-1}$$

Korollar 2

§2011 Wenn wir hier $g = 0$ festlegen, werden wir wegen $1 - x^g = gln\frac{1}{x}$ diese Gleichung haben

$$\int x^{f-1} \, \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{n-1} \frac{\int x^{f-1} \, \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{2n-1}}{\int x^{f-1} \, \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{3n-1}} = k \int x^{2nk-1} \, \mathrm{dx}(1-x^k)^{n-1}$$

weil wir also zuvor gefunden hatten

$$\frac{(\int x^{f-1} \, \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{n-1})^2}{\int x^{f-1} \, \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{2n-1}} = k \int x^{nk-1} \, \mathrm{dx}(1-x^k)^{n-1}$$

werden wir, indem diese Gleichungen miteineinander multipliziert werden, haben

$$\frac{(\int x^{f-1} \, \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{n-1})^3}{\int x^{f-1} \, \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{3n-1}} = k^2 \int x^{nk-1} \, \mathrm{dx}(1-x^k)^{n-1} \cdot \int x^{2nk-1} \, \mathrm{dx}(1-x^k)^{n-1}$$

Korollar 3

§2111 Es ist ohne jegliche Einschränkung möglich, hier $f = 1$ festzulegen; dann wird also nach Nehmen von $n = \frac{1}{3}$ und $k = 3$ sein

$$\frac{(\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{-\frac{2}{3}})^3}{\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^0} = 9\int \mathrm{dx}(1-x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot \int x\,\mathrm{dx}(1-x^3)^{-\frac{2}{3}}$$

und wegen

$$\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{-\frac{2}{3}} = 3\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{\frac{1}{3}} \text{ und } \qquad \int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^0 = 1$$

$$\left(\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \frac{1}{3}\int \mathrm{dx}(1-x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot \int x\,\mathrm{dx}(1-x^3)^{-\frac{2}{3}}$$

dann wird in der Tat nach Nehmen von $n = \frac{2}{3}$ und $k = 3$ sein

$$\frac{(\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{-\frac{1}{3}})^3}{\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})} = 9\int x\,\mathrm{dx}(1-x^3)^{-\frac{1}{3}} \cdot \int x^3\,\mathrm{dx}(1-x^3)^{-\frac{1}{3}}$$

oder

$$\left(\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}}\right)^3 = \frac{4}{3}\int x\,\mathrm{dx}(1-x^3)^{-\frac{1}{3}} \cdot \int x^3\,\mathrm{dx}(1-x^3)^{-\frac{1}{3}}$$

Allgemeines Theorem

§2211 Wenn die folgenden Integralformeln vom Wert $x = 0$ bis hin zu $x = 1$ erstreckt werden und n irgendeine ganze positive Zahl bezeichnet, wird sein

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n}{(\lambda n+1)(\lambda n+2)...(\lambda+1)n} = \frac{\lambda}{\lambda+1}ng\int x^{f+\lambda ng-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1} \cdot \frac{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{\lambda n-1}}{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{(\lambda+1)n-1}}$$

welche positiven Zahlen auch immer für die Buchstaben f und g angenommen werden.

Beweis

Weil, wie wir oben gezeigt haben, ist

$$\frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{(f+g)(f+2g)\ldots(f+ng)}=\frac{f\cdot ng}{g^n(f+ng)}\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1}$$

wenn wir hier anstellen von n λn schreiben, dann aber $(\lambda+1)n$, werden wir diese zwei Gleichungen erhalten

$$\frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot \lambda n}{(f+g)(f+2g)\ldots(f+\lambda ng)}=\frac{f\cdot \lambda ng}{g^{\lambda n}(f+\lambda ng)}\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{\lambda n-1}$$

$$\frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (\lambda+1)n}{(f+g)(f+2g)\ldots(f+(\lambda+1)ng)}=\frac{f\cdot (\lambda+1)ng}{g^{(\lambda+1)n}(f+(\lambda+1)ng)}\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{(\lambda+1)n-1}$$

von denen jene durch diese geteilt liefert

$$\frac{(f+\lambda ng+g)(f+\lambda ng+2g)\ldots(f+\lambda ng+ng)}{(\lambda n+1)(\lambda n+2)\ldots(\lambda n+n)}=g^n\frac{\lambda(f+\lambda ng+ng)}{(\lambda+1)(f+\lambda ng)}\cdot\frac{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{\lambda n-1}}{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{(\lambda+1)n-1}}$$

Aber wenn wir in der ersten Gleichung anstelle von f $f+\lambda ng$ schreiben, werden wir erhalten

$$\frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{(f+\lambda ng+g)(f+\lambda ng+2g)\ldots(f+\lambda ng+ng)}=\frac{(f+\lambda ng)ng}{g^n(f+\lambda ng+ng)}\int x^{f+\lambda ng-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1}$$

welche zwei Gleichungen miteinander multipliziert die zu beweisende Gleichung selbst hervorbringen

$$\frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{(\lambda n+1)(\lambda n+2)\ldots(\lambda n+n)}=\frac{\lambda ng}{\lambda+1}\int x^{f+\lambda ng-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1}\cdot\frac{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{\lambda n-1}}{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{(\lambda+1)n-1}}$$

Korollar 1

§2311 Wenn wir in der wesentlichen Gleichung $f=\lambda$ und $g=1$ festlegen, werden wir auch auffinden

$$\frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{(\lambda n+1)(\lambda n+2)\ldots(\lambda n+n)}=\frac{\lambda n}{\lambda+1}\int x^{\lambda n-1}\,\mathrm{dx}(1-x)^{n-1}$$

welche Form, indem anstelle von x x^k geschrieben wird, in diese übergeht

$$\frac{\lambda nk}{\lambda+1}\int x^{\lambda nk-1}\,\mathrm{dx}(1-x^k)^{n-1}$$

sodass wir dieses sich sehr weit erstreckende Theorem haben

$$g\int x^{f+\lambda ng-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1}\cdot\frac{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{\lambda n-1}}{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{\lambda n+n-1}}=k\int x^{\lambda nk-1}\,\mathrm{dx}(1-x^k)^{n-1}$$

Korollar 2

§2411 Dieses Theorem hat nun Geltung, auch wenn n keine ganze Zahl ist; ja wir wollen sogar, weil es möglich ist, die Zahl λ nach Belieben anzunehmen, anstellen λn m schreiben und werden zu diesem Theorem gelangen

$$\frac{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{m-1}}{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{m+n-1}}=\frac{k\int x^{mk-1}\,\mathrm{dx}(1-x^k)^{n-1}}{g\int x^{f+mg-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{n-1}}$$

Korollar 3

§2511 Wenn wir $g=0$ setzen, wird wegen $1-x^g=gln\frac{1}{x}$ dieses Theorem diese Form annehmen

$$\frac{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{m-1}}{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{m+n-1}}=\frac{k\int x^{mk-1}\,\mathrm{dx}(1-x^k)^{n-1}}{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{n-1}}$$

welche bequemer so dargestellt wird

$$\frac{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{n-1}\cdot\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{m-1}}{\int x^{f-1}\,\mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{m+n-1}}=k\int x^{mk-1}\,\mathrm{dx}(1-x^k)^{n-1}$$

wo es ersichtlich ist, dass die Zahlen m und n miteinander vertauscht werden können.

Bemerkung

§2611 Ich habe also zwei Quellen entdeckt, woher es möglich ist, unzählige Vergleiche von Integralformeln zu schöpfen; die eine in §24 eröffnete Quelle umfasst Integralformeln dieser Art

$$\int x^{p-1}\,\mathrm{dx}(1-x^g)^{q-1}$$

welche ich schon vor einiger Zeit in den Bemerkungen über vom Wert $x = 0$ bis hinzu $x = 1$ erstreckte Integrale der Formeln

$$\int x^{p-1}\, \mathrm{dx}(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$$

behandelt habe, wo ich gezeigt habe, dass zuerst die Buchstaben p und q miteinander vertauscht werden können, dass ist

$$\int x^{p-1}\, \mathrm{dx}(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1} = \int x^{q-1}\, \mathrm{dx}(1-x^n)^{\frac{p}{n}-1}$$

dann aber, dass ist

$$\int \frac{x^{p-1}\, \mathrm{dx}}{(1-x^n)^{\frac{p}{n}}} = \frac{\pi}{nsin\frac{p\pi}{n}}$$

besonders habe ich aber bewiesen, dass ist

$$\int \frac{x^{p-1}\, \mathrm{dx}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} \cdot \int \frac{x^{p+q-1}\, \mathrm{dx}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}} = \int \frac{x^{p-1}\, \mathrm{dx}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-r}}} \cdot \int \frac{x^{p+r-1}\, \mathrm{dx}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$$

in welcher Gleichung der in §24 gefundene Vergleich schon enthalten ist, so dass daher nichts Neues, was ich nicht schon entwickelt habe, abgeleitet werden kann. Ich unternehme es hier also hauptsšachlich, die andere in §25 erklärte Quelle zu untersuchen; weil dort ohne jegliche Einschränkung $f = 1$ genommen werden kann, wird unsere primäre Gleichung sein

$$\frac{\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{n-1} \cdot \int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{m-1}}{\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{m+n-1}} = k\int x^{mk-1}\, \mathrm{dx}(1-x^k)^{n-1}$$

mit deren Hilfe es möglich sein wird, die Werte der Integralformel $\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{\lambda}$, wann immer λ keine ganze Zahl ist, auf Quadraturen von algebraischen Kurven zurückzuführen; weil man eben, sooft λ eine ganze Zahl ist, eine uneingeschränkte Integration hat, weil ja ist

$$\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{\lambda} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \lambda$$

Die Frage von größter Bedeutung dreht sich aber um die Fälle, in denen λ eine gebrochene Zahl ist; diese werde ich also im Verhältnis zur unterscheidenden Benennung hier nacheinander bestimmen

Problem 2

§2711 Während i eine ganze positive Zahl bezeichnet, den Wert der Integralformel $\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{\frac{i}{2}}$ zu bestimmen, nachdem die Integration von $x = 0$ bis hinzu $x = 1$ erstreckt worden ist.

Lösung

In unserer allgemeinen Gleichung wollen wir $m = n$ setzen und es wird sein

$$\frac{(\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{n-1})^2}{\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{2n-1}} = k \int x^{nk-1}\,\mathrm{dx}(1-x^k)^{n-1}$$

Es sei nun $n - 1 = \frac{i}{2}$ und wegen $2n - 1 = i + 1$ wird sein

$$\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{2n-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (i+1)$$

und werde weiter $k = 2$ angenommen, dass $nk - 1 = i + 1$ ist, und es wird werden

$$\frac{(\int \mathrm{dx}\sqrt{(ln\frac{1}{x})^i})^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (i+1)} = 2 \int x^{i+1}\,\mathrm{dx}(1-x^2)^{\frac{i}{2}}$$

und daher

$$\frac{\int \mathrm{dx}\sqrt{(ln\frac{1}{x})^i}}{\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (i+1)}} = \sqrt{2 \int x^{i+1}\,\mathrm{dx}(1-x^2)^{\frac{i}{2}}}$$

wo es ersichtlich ist, dass es passend ist, dass für i nur ungerade Zahlen angenommen werden, weil ja für gerade die Entwicklung per se offenbar ist.

Korollar 1

§2811 Aber alle Fälle werden leicht auf $i = 1$ oder daher auf $i = -1$ zurückgeführt; solange nämlich $i + 1$ keine negative Zahl ist, hat die gefundene Reduktion Geltung. Für diesen Fall wird also sein

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{ln\frac{1}{x}}} = \sqrt{2 \int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{1-xx}}} = \sqrt{\pi}$$

wegen $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{1-xx}} = \frac{\pi}{2}$

Korollar 2

§2911 Nachdem aber dieser grundlegende Fall erledigt worden ist, werden wir wegen

$$\int \mathrm{dx}\Big(ln\frac{1}{x}\Big)^n = n\int \mathrm{dx}\Big(ln\frac{1}{x}\Big)^{n-1}$$

haben

$$\int \mathrm{dx}\sqrt{ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \qquad \int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{\frac{3}{2}} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\sqrt{\pi}$$

und im Allgemeinen

$$\int \mathrm{dx}\Big(ln\frac{1}{x}\Big)^{\frac{2n+1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2n+1}{2}\sqrt{\pi}$$

Problem 3

§3011 Während i eine ganze positive Zahl bezeichnet, den Wert der Integralformel $\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{\frac{1}{3}-1}$ zu bestimmen, nachdem die Integration von $x=0$ bis $x=1$ erstreckt worden ist.

Lösung

Wir wollen von der Gleichung des vorhergehenden Problems aus beginnen

$$\frac{(\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{n-1})^2}{\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{2n-1}} = k\int x^{nk-1}\,\mathrm{dx}(1-x^k)^{n-1}$$

und in der allgemeinen Form $m=2n$ setzen, dass man hat

$$\frac{\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{n-1}\cdot\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{2n-1}}{\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{3n-1}} = k\int x^{2nk-1}\,\mathrm{dx}(1-x^k)^{n-1}$$

und wir, indem diese zwei Gleichheiten multipliziert werden, erhalten

$$\frac{(\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{n-1})^3}{\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{3n-1}} = kk\int x^{nk-1}\,\mathrm{dx}(1-x^k)^{n-1}\cdot\int x^{2nk-1}\,\mathrm{dx}(1-x^k)^{n-1}$$

Hier werde nun $n = \frac{i}{3}$ gesetzt, dass ist

$$\int \mathrm{d}x (ln\frac{1}{x})^{i-1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (i-1)$$

und es werde $k = 3$ genommen und es wird hervorgehen

$$\frac{(\int \mathrm{d}x \sqrt[3]{(ln\frac{1}{x})^{i-3}})^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (i-1)} = 9 \int x^{i-1}\, \mathrm{d}x \sqrt[3]{(1-x^3)^{i-3}} \cdot \int x^{2i-1}\, \mathrm{d}x \sqrt[3]{(1-x^3)^{i-3}}$$

woher wir folgern

$$\frac{\int \mathrm{d}x \sqrt[3]{(ln\frac{1}{x})^{i-3}}}{\sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (i-1)}} = \sqrt[3]{9 \int \frac{x^{i-1}\, \mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^{i-3}}} \cdot \int \frac{x^{2i-1}\, \mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^{i-3}}}}$$

KOROLLAR 1

§3111 Hier tauchen zwei wesentliche Fälle auf, von welchen alle übrigen abhängen, indem nätürlich entweder $i = 1$ oder $i = 2$ gesetzt wird, die sind

I. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(ln\frac{1}{x})^2}} = \sqrt[3]{9 \int \frac{x\, \mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} \cdot \int \frac{x\, \mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}}$$

II. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{ln\frac{1}{x}}} = \sqrt[3]{9 \int \frac{x\, \mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-x^3}} \cdot \int \frac{x^3\, \mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-x^3}}}$$

welche letzte Form wegen

$$\int \frac{x^3\, \mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{1}{3} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$$

übergeht in

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{ln\frac{1}{x}}} = \sqrt[3]{3 \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-x^3}} \cdot \int \frac{x\, \mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-x^3}}}$$

Korollar 2

§3211 Wenn wir wie bei meinen angeführten Beobachtungen der Kürze wegen festlegen

$$\int \frac{x^{p-1}\,\mathrm{dx}}{\sqrt[3]{(1-x^3)^{p-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$$

und wie dort für diese Klasse

$$\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{\pi}{3 sin\frac{\pi}{3}} = \alpha$$

dann aber

$$\left(\frac{1}{1}\right) = \int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = A$$

wird sein

$$\text{I.} \qquad \int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt[3]{(ln\frac{1}{x})^2}} = \sqrt[3]{g\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{2}{1}\right)} = \sqrt[3]{9\alpha A}$$

$$\text{II.} \qquad \int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt[3]{(ln\frac{1}{x})^1}} = \sqrt[3]{3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{3\alpha\alpha}{A}}$$

Korollar 3

§3311 Für diesen ersten Fall werden wir also haben

$$\int \mathrm{dx}\sqrt[3]{(ln\frac{1}{x})^{-2}} = \sqrt[3]{9\alpha A}, \qquad \int \mathrm{dx}\sqrt[3]{ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{9\alpha A}$$

und

$$\int \mathrm{dx}\sqrt[3]{\left(ln\frac{1}{x}\right)^{3n+1}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{3n+1}{3}\sqrt[3]{9\alpha A}$$

für den anderen Fall hingegen

$$\int \mathrm{dx}\sqrt[3]{\left(ln\frac{1}{x}\right)^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{3\alpha\alpha}{A}}, \qquad \int \mathrm{dx}\sqrt[3]{\left(ln\frac{1}{x}\right)^{2}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3\alpha\alpha}{A}}$$

und

$$\int \mathrm{dx}\sqrt[3]{\left(ln\frac{1}{x}\right)^{3n-1}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{3n-1}{3}\sqrt[3]{\frac{3\alpha\alpha}{A}}$$

Problem 4

§3411 Während i eine ganze positive Zahl bezeichnet, den Wert der Integralformel $\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{\frac{i}{4}-1}$ zu bestimmen, nachdem die Integration von $x = 0$ bis $x = 1$ erstreckt worden ist.

Lösung

In der Lösung des vorhergehenden Problems sind wir zu dieser Gleichung geführt worden

$$\frac{(\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{n-1})^3}{\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{3n-1}} = kk \int \frac{x^{nk-1}\,\mathrm{dx}}{(1-x^k)^{1-n}} \cdot \int \frac{x^{2nk-1}\,\mathrm{dx}}{(1-x^k)^{1-n}}$$

aber die allgemeine Form, indem $m = 3n$ gesetzt wird, liefert

$$\frac{\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{n-1} \cdot \int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{3n-1}}{\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{4n-1}} = k \int \frac{x^{3nk-1}\,\mathrm{dx}}{(1-x^k)^{1-n}}$$

durch Verbinden von welchen wir erhalten

$$\frac{(\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{n-1})^4}{\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{4n-1}} = k^3 \int \frac{x^{nk-1}\,\mathrm{dx}}{(1-x^k)^{1-n}} \cdot \int \frac{x^{2nk-1}\,\mathrm{dx}}{(1-x^k)^{1-n}} \cdot \int \frac{x^{3nk-1}\,\mathrm{dx}}{(1-x^k)^{1-n}}$$

Es sei nun $n = \frac{i}{4}$ und es werde $k = 4$ genommen und es wird werden

$$\frac{\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{\frac{i}{4}-1}}{\sqrt[4]{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (i-1)}} = \sqrt[4]{4^3 \int \frac{x^{i-1}\,\mathrm{dx}}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-i}}} \cdot \int \frac{x^{2i-1}\,\mathrm{dx}}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-i}}} \cdot \int \frac{x^{3i-1}\,\mathrm{dx}}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-i}}}}$$

Korollar 1

§3511 Wenn also $i = 1$ ist, werden wir haben

$$\int \mathrm{dx}\sqrt[4]{\left(ln\frac{1}{x}\right)^{-3}} = 4^3 \int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} \cdot \int \frac{x\,\mathrm{dx}}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} \cdot \int \frac{xx\,\mathrm{dx}}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}}$$

wenn dieser Ausdruck mit dem Buchstaben P bezeichnet wird, wird im Allgemeinen sein

$$\int \mathrm{dx}\sqrt[4]{\left(ln\frac{1}{x}\right)^{4n-3}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n-3}{4}P$$

Korollar 2

§3611 Für den anderen wesentlichen Fall wollen wir $i = 3$ nehmen und es wird sein

$$\int \mathrm{dx}\sqrt[4]{\left(ln\frac{1}{x}\right)^{-1}} = \sqrt[4]{2 \cdot 4^3 \int \frac{x^2}{\sqrt[4]{1-x^4}} \cdot \int \frac{x^5\ \mathrm{dx}}{\sqrt[4]{1-x^4}} \cdot \int \frac{x^8}{\sqrt[4]{1-x^4}}}$$

oder nach einer Reduktion auf einfachere Formen

$$\int \mathrm{dx}\sqrt[4]{\left(ln\frac{1}{x}\right)^{-1}} = \sqrt[4]{8 \int \frac{xx\ \mathrm{dx}}{\sqrt[4]{1-x^4}} \cdot \int \frac{x\ \mathrm{dx}}{\sqrt[4]{1-x^4}} \cdot \int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt[4]{1-x^4}}}$$

wenn dieser Ausdruck mit dem Buchstaben Q bezeichnet wird, wird allgemein sein

$$\int \mathrm{dx}\sqrt[4]{\left(ln\frac{1}{x}\right)^{4n-1}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{11}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{4n-1}{4} Q$$

Bemerkung

§3711 Wenn wir die Integralformel $\int \frac{x^{p-1}\ \mathrm{dx}}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-q}}}$ mit diesem Zeichen $\left(\frac{p}{q}\right)$ kennzeichnen, wird sich die Lösung des Problems so verhalten

$$\int \mathrm{dx}\sqrt[4]{(ln\frac{1}{x})^{i-4}} = \sqrt[4]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (i-1) 4^3 \left(\frac{i}{i}\right)\left(\frac{2i}{i}\right)\left(\frac{3i}{i}\right)}$$

und für die beiden entwickelten Fälle wird

$$P = \sqrt[4]{4^3 \left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{1}\right)} \quad \text{und} \qquad Q = \sqrt[4]{8 \left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}$$

Wir wollen nun für die Formeln, die vom Kreis abhängen, festsetzen

$$\left(\frac{3}{1}\right) = \frac{\pi}{4 sin \frac{\pi}{4}} = \alpha \quad \text{und} \qquad \left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\pi}{4 sin \frac{2\pi}{4}} = \beta$$

für die transzendenten höhrer Ordnung aber

$$\left(\frac{2}{1}\right) = \int \frac{x\ \mathrm{dx}}{\sqrt[4]{1-x^4}} = \int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt[2]{1-x^4}} = A$$

von welchen näturlich alle übrigen abhängen, und wir finden auf

$$P = \sqrt[4]{4^3 \frac{\alpha\alpha}{\beta} AA} \text{ und } \qquad Q = \sqrt[4]{4\alpha\alpha\beta \frac{1}{AA}}$$

woher klar zutage tritt, dass ist

$$PQ = 4\alpha = \frac{\pi}{sin \frac{\pi}{4}}$$

Weil aber $\alpha = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ und $\beta = \frac{\pi}{4}$ ist, wird sein
$P = \sqrt[4]{32\pi AA}$ und $Q = \sqrt[4]{\frac{\pi^3}{8AA}}$ und $\frac{P}{Q} = \frac{4A}{\sqrt{\pi}}$

Problem 5

§3811 Während i eine ganze positive Zahl bezeichnet, den Wert der Integralformel $\int \mathrm{dx} \sqrt[5]{(ln\frac{1}{x})^{i-5}}$ zu bestimmen, nachdem die Integration von $x = 0$ bis $x = 1$ erstreckt worden ist.

Lösung

Aus den vorhergehenden Lösungen ist es schon hinreichend klar, dass für diesen Fall schließlich zu dieser Form gelangt werden wird

$$\frac{\int \mathrm{dx} \sqrt[5]{(ln\frac{1}{x})^{i-5}}}{\sqrt[5]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (i-1)}} = 5^4 \int \frac{x^{i-1}\,\mathrm{dx}}{\sqrt[5]{(1-x^5)^{5-i}}} \cdot \int \frac{x^{2i-1}\,\mathrm{dx}}{\sqrt[5]{(1-x^5)^{5-i}}} \cdot \int \frac{x^{3i-1}\,\mathrm{dx}}{\sqrt[5]{(1-x^5)^{5-i}}} \cdot \int \frac{x^{4i-1}\,\mathrm{dx}}{\sqrt[5]{(1-x^5)^{5-i}}}$$

welche Integralformeln zur fünften Klasse meiner oben erwähnten Abhandlung zu zählen sind. Daher, wenn auf die dort gebrauchte Weise das Zeichen $\left(\frac{p}{q}\right)$ diese Formel $\int \frac{x^{p-1}\,\mathrm{dx}}{\sqrt[5]{(1-x^5)^{5-q}}}$ bezeichnet, wird es möglich sein, den gesuchten Wert gefälliger so auszudrücken, dass ist

$$\int \mathrm{dx} \sqrt[5]{\left(ln\frac{1}{x}\right)^{i-5}} = \sqrt[5]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (i-1) 5^4 \left(\frac{i}{i}\right)\left(\frac{2i}{i}\right)\left(\frac{3i}{i}\right)\left(\frac{4i}{i}\right)}$$

wo es freilich genügt, i kleinere Werte als fünf zugeteilt zu haben; wann immer aber die Zähler fünf überragen, ist es festzuhalten, dass ist

$$\left(\frac{5+m}{i}\right) = \frac{m}{m+i}\left(\frac{m}{i}\right)$$

dann aber weiter

$$\left(\frac{10+m}{i}\right) = \frac{m}{m+i} \cdot \frac{m+5}{m+i+5}\left(\frac{m}{i}\right)$$

$$\left(\frac{15+m}{i}\right) = \frac{m}{m+i} \cdot \frac{m+5}{m+i+5} \cdot \frac{m+10}{m+i+10}\left(\frac{m}{i}\right)$$

Darauf involvieren für diese Klasse in der Tat zwei Formeln die Quadratur des Kreises, welche seien

$$\left(\frac{4}{1}\right) = \frac{\pi}{5sin\frac{\pi}{5}} = \alpha \quad \text{und} \quad \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{5sin\frac{2\pi}{5}} = \beta$$

die zwei anderen erhalten aber höhere Quadraturen, die festgelegt werden

$$\left(\frac{3}{1}\right) = \int \frac{xx\,\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}} = A \quad \text{und} \quad \left(\frac{2}{2}\right) = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}} = B$$

und aus diesen habe ich die Werte aller übrigen Formeln dieser Klasse angegeben, natürlich

$\left(\frac{5}{1}\right) = 1$, $\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3}$, $\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4}$, $\left(\frac{5}{5}\right) = \frac{1}{5}$

$\left(\frac{4}{1}\right) = \alpha$, $\left(\frac{4}{2}\right) = \frac{\beta}{A}$, $\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\beta}{2\beta}$, $\left(\frac{4}{4}\right) = \frac{\alpha}{3A}$

$\left(\frac{3}{1}\right) = A$, $\left(\frac{3}{2}\right) = \beta$, $\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\beta\beta}{\alpha B}$

$\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{\alpha B}{\beta}$, $\left(\frac{2}{2}\right) = B$

$\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\alpha A}{\beta}$

Korollar 1

§3911 Nach Nehmen des Exponenten $i = 1$ wird sein

$$\int \mathrm{d}x\sqrt[5]{(ln\frac{1}{x})^{-4}} = \sqrt[5]{5^4\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{1}\right)} = \sqrt[5]{5^4\frac{\alpha^3}{\beta^2}A^2B}$$

woher wir im Allgemeinen folgern, dass, während n irgendeine ganze Zahl bezeichnet, sein wird

$$\int \mathrm{d}x\sqrt[5]{(ln\frac{1}{x})^{5n-4}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{11}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{5n-4}{5}\sqrt[5]{5^4\frac{\alpha^3}{\beta^2}A^2B}$$

Korollar 2

§4011 Es sei nun $i = 2$, und weil hervorgeht

$$\int \mathrm{dx}\sqrt[5]{(ln\frac{1}{x})^{-3}} = \sqrt[5]{1\cdot 5^4\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{2}\right)\left(\frac{8}{2}\right)}$$

wird wegen

$$\left(\frac{6}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{1}\right) \quad \text{und} \qquad \left(\frac{8}{2}\right) = \frac{3}{3}\left(\frac{3}{2}\right)$$

wird dieser Ausdruck sein

$$\sqrt[5]{5^3\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)} = \sqrt[5]{5^3\alpha\beta\frac{BB}{A}}$$

und im Allgemeinen

$$\int \mathrm{dx}\sqrt[5]{\left(ln\frac{1}{x}\right)^{5n-3}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{12}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{5n-3}{5}\sqrt[5]{5^3\alpha\beta\frac{BB}{A}}$$

Korollar 3

§4111 Es sei $i = 3$ und die gefundene Form

$$\int \mathrm{dx}\sqrt[5]{\left(ln\frac{1}{x}\right)^{-2}} = \sqrt[5]{2\cdot 5^4\left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{6}{3}\right)\left(\frac{9}{3}\right)\left(\frac{12}{3}\right)}$$

geht wegen $\left(\frac{6}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{1}\right)$, $\left(\frac{9}{3}\right) = \frac{4}{7}\left(\frac{4}{3}\right)$,$\left(\frac{12}{3}\right) = \frac{2}{5}\cdot\frac{7}{10}\left(\frac{3}{2}\right)$ über in

$$\sqrt[5]{2\cdot 5^2\left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)} = \sqrt[5]{5^2\frac{\beta^4}{\alpha}\cdot\frac{A}{BB}}$$

woher im Allgemeinen erschlossen wird

$$\int \mathrm{dx}\sqrt[5]{\left(ln\frac{1}{x}\right)^{5n-2}} = \frac{3}{5}\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{13}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{5n-2}{5}\sqrt[5]{5^2\frac{\beta^4}{\alpha}\cdot\frac{A}{BB}}$$

Korollar 4

§4211 Nachdem schließloch $i = 4$ gesetzt worden ist, wird unsere Form

$$\int dx \sqrt[5]{\left(ln\frac{1}{x}\right)^{-1}} = \sqrt[5]{6 \cdot 5^4 \left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{8}{4}\right)\left(\frac{12}{4}\right)\left(\frac{16}{4}\right)}$$

wegen $\left(\frac{8}{4}\right) = \frac{3}{7}\left(\frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{12}{4}\right) = \frac{2}{6} \cdot \frac{7}{11}\left(\frac{4}{2}\right)$, $\left(\frac{16}{4}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{11}{15}\left(\frac{4}{1}\right)$ in diese transformiert werden

$$\sqrt[5]{6 \cdot 5\left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{4}{1}\right)} = \sqrt[5]{5\frac{\alpha\alpha\beta\beta}{AAB}}$$

sodass im Allgemeinen ist

$$\int dx \sqrt[5]{\left(ln\frac{1}{x}\right)^{5n-1}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{14}{5} \cdot ... \cdot \frac{5n-1}{5} \sqrt[5]{5\alpha\alpha\beta\beta\frac{1}{AAB}}$$

Bemerken

§4311 Wenn wir den Wert der Integralformel $\int dx(ln\frac{1}{x})^{\lambda}$ mit diesem Zeichen $[\lambda]$ darstellen, liefern die bisher entwickelten Fälle

$$\left[-\frac{4}{5}\right] = \sqrt[5]{5^4\frac{\alpha^3}{\beta^2} \cdot A^2B}, \qquad \left[+\frac{1}{5}\right] = \frac{1}{5}\sqrt[5]{5^4\frac{\alpha^3}{\beta^2} \cdot A^2B}$$

$$\left[-\frac{3}{5}\right] = \sqrt[5]{5^3\alpha\beta \cdot \frac{BB}{A}}, \qquad \left[+\frac{2}{5}\right] = \frac{2}{5}\sqrt[5]{5^3\alpha\beta \cdot \frac{BB}{A}}$$

$$\left[-\frac{2}{5}\right] = \sqrt[5]{5^2\frac{\beta^4}{\alpha} \cdot \frac{A}{BB}}, \qquad \left[+\frac{3}{5}\right] = \frac{3}{5}\sqrt[5]{5^2\frac{\beta^4}{\alpha} \cdot \frac{A}{BB}}$$

$$\left[-\frac{1}{5}\right] = \sqrt[5]{5\alpha^2\beta^2 \cdot \frac{1}{AAB}}, \qquad \left[+\frac{4}{5}\right] = \frac{4}{5}\sqrt[5]{5\alpha^2\beta^2 \cdot \frac{1}{AAB}}$$

woher, indem je zwei, deren Indizes zugleich genommen $= 0$ werden, verbunden werden, wir erschließen

$$\left[+\frac{1}{5}\right] \cdot \left[-\frac{1}{5}\right] = \alpha = \frac{\pi}{5sin\frac{\pi}{5}}$$

$$\left[+\frac{2}{5}\right]\cdot\left[-\frac{2}{5}\right]=2\beta=\frac{2\pi}{5sin\frac{2\pi}{5}}$$

$$\left[+\frac{3}{5}\right]\cdot\left[-\frac{3}{5}\right]=3\beta=\frac{3\pi}{5sin\frac{3\pi}{5}}$$

$$\left[+\frac{4}{5}\right]\cdot\left[-\frac{4}{5}\right]=4\alpha=\frac{4\pi}{5sin\frac{4\pi}{5}}$$

Aus dem vorhergehenden Problem leiten wir aber auf die gleiche Weise ab

$$\left[-\frac{3}{4}\right]=P=\sqrt[4]{4^3\frac{\alpha\alpha}{\beta}\cdot AA},\qquad \left[+\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{4}\sqrt[4]{4^3\frac{\alpha\alpha}{\beta}\cdot AA}$$

$$\left[-\frac{1}{4}\right]=Q=\sqrt[4]{4\alpha\alpha\beta\cdot\frac{1}{AA}},\qquad \left[+\frac{3}{4}\right]=\frac{3}{4}\sqrt[4]{4\alpha\alpha\beta\cdot\frac{1}{AA}}$$

und daher

$$\left[+\frac{1}{4}\right]\cdot\left[-\frac{1}{4}\right]=\alpha=\frac{\pi}{4sin\frac{\pi}{4}}$$

$$\left[+\frac{3}{4}\right]\cdot\left[-\frac{3}{4}\right]=3\alpha=\frac{3\pi}{4sin\frac{3\pi}{4}}$$

woher wir im Allgemeinen dieses Theorem erhalten, dass ist

$$[\lambda]\cdot[-\lambda]=\frac{\lambda\pi}{sin\lambda\pi}$$

dessen Begründung aus der einst dargelegten Interpolationsmethode so gegeben werden kann. Weil ist

$$[\lambda]=\frac{1^{1-\lambda}\cdot 2^{\lambda}}{1+\lambda}\cdot\frac{2^{1-\lambda}\cdot 3^{\lambda}}{2+\lambda}\cdot\frac{3^{1-\lambda}\cdot 4^{\lambda}}{3+\lambda}\cdot etc.$$

wird sein

$$[-\lambda]=\frac{1^{1+\lambda}\cdot 2^{-\lambda}}{1-\lambda}\cdot\frac{2^{1+\lambda}\cdot 3^{-\lambda}}{2-\lambda}\cdot\frac{3^{1+\lambda}\cdot 4^{-\lambda}}{3-\lambda}\cdot etc.$$

und daher

$$[\lambda]\cdot[-\lambda]=\frac{1\cdot 1}{1-\lambda\lambda}\cdot\frac{2\cdot 2}{4-\lambda\lambda}\cdot\frac{3\cdot 3}{9-\lambda\lambda}\cdot etc.=\frac{\lambda\pi}{sin\lambda\pi}$$

wie ich andererorts bewiesen habe.

Allgemeines Problem 6

§4411 Wenn die Buchstaben i und n ganze positive Zahlen bezeichnen, den Wert dieser Integralformel zu bestimmen

$$\int dx \left(ln\frac{1}{x}\right)^{\frac{i-n}{n}} \quad \text{oder} \quad \int dx \sqrt[n]{\left(ln\frac{1}{x}\right)^{i-n}}$$

nachdem die Integration von $x = 0$ bis $x = 1$ erstreckt worden ist.

Lösung

Die bisher gebrauchte Methode wird den gesuchten Wert auf die folgende Weise durch Quadraturen von algebraischen Kurven ausgedrückt darbieten

$$\frac{\int dx \sqrt[4]{(ln\frac{1}{x})^{i-n}}}{\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (i-1)}} = \sqrt[n]{n^{n-1}\int \frac{x^{i-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-i}}}\cdot \int \frac{x^{2i-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-i}}}\cdot \ldots \cdot \int \frac{x^{(n-1)i-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-i}}}}$$

Wenn wir daher nun der Kürze wegen die Integralformel $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ mit diesem Charakter $\left(\frac{p}{q}\right)$, die Formel $\int dx \sqrt[n]{(ln\frac{1}{x})^m}$ hingegen mit $\left[\frac{m}{n}\right]$ bezeichnen, sodass $\left[\frac{m}{n}\right]$ den Wert dieses unbestimmten Produktes $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot z$ kennzeichnet, während $z = \frac{m}{n}$ ist, wird der gesuchte Wert auf diese Weise kürzer ausgedrückt hervorgehen

$$\left[\frac{i-n}{n}\right] = \sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (i-1)n^{n-1}\left(\frac{i}{i}\right)\left(\frac{2i}{i}\right)\left(\frac{3i}{i}\right)\ldots\left(\frac{ni-i}{i}\right)}$$

woher auch erschlossen wird

$$\left[\frac{i}{n}\right] = \frac{i}{n}\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (i-1)n^{n-1}\left(\frac{i}{i}\right)\left(\frac{2i}{i}\right)\left(\frac{3i}{i}\right)\ldots\left(\frac{ni-i}{i}\right)}$$

Hier wird es immer genügen, die Zahl i kleiner als n angenommen zu haben, weil für größere bekannt ist, dass ist

$$\left[\frac{i+n}{n}\right] = \frac{i+n}{n}\left[\frac{i}{n}\right], \quad \text{ebenso} \quad \left[\frac{i+2n}{n}\right] = \frac{i+n}{n}\cdot\frac{i+2n}{n}\left[\frac{i}{n}\right] \text{ etc.}$$

etc. und auf diese Weise wird die ganze Untersuchung nur auf die Fälle zurückgeführt, in denen der Zähler i des Bruches $\frac{i}{n}$ kleiner als der Nenner n ist. Außerdem wird es aber über die Integralformeln

$$\int \frac{x^{p-1}\,\mathrm{dx}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$$

förderlich sein, die folgenden Dinge angemerkt zu haben
I. Die Buchstaben p und q sind miteinander vertauschbar, dass ist

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$$

II. Wenn der einen der beiden Zahlen p oder q dem Exponenten n selbst gleich wird, wird der Wert der Integralformel algebraisch sein, natürlich

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{p}{n}\right) = \frac{1}{p}$$

oder

$$\left(\frac{n}{q}\right) = \left(\frac{q}{n}\right) = \frac{1}{q}$$

III. Wenn die Summe der Zahlen $p+q$ dem Exponenten n selbst gleich wird, kann der Wert der Integralformel $\left(\frac{p}{q}\right)$ durch den Kreis dargeboten werden, weil ist

$$\left(\frac{p}{n-p}\right) = \left(\frac{n-p}{p}\right) = \frac{\pi}{nsin\frac{p\pi}{n}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{q}{n-q}\right) = \left(\frac{n-q}{q}\right) = \frac{\pi}{nsin\frac{q\pi}{n}}$$

IV. Wenn die eine der Zahlen p und q größer als der Exponent n ist, kann die Integralformel $\left(\frac{p}{q}\right)$ auf eine andere zurückgeführt werden, deren Terme kleiner als n sind, was mit Hilfe dieser Reduktion geschieht

$$\left(\frac{p+n}{q}\right) = \frac{p}{p+q}\left(\frac{p}{q}\right)$$

V. Unter mehreren Integralformeln dieser Art besteht eine solche Reduktion, dass ist

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right) = \left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right) = \left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{p}\right)$$

mit deren Hilfe alle Reduktionen aufgefunden werden, was ich in den Beobachtungen über diese Formeln dargelegt habe.

Korollar 1

§4511 Wenn wir auf diese Weise mit Hilfe der in #IV angegebenen Reduktion die gefundene Form auf die einzelnen Fälle anwenden, werden wir sie auf die folgende Art sehr einfach darbieten können. Und zuerst werden wir freilich für den Fall $n = 2$, in dem keine Reduktion von Nöten ist, haben

$$\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\sqrt[2]{2\left(\frac{1}{1}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{\pi}{sin\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Korollar 2

§4611 Für den Fall $n = 3$ werden wir diese Reduktionen haben

$$\left[\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3}\sqrt[3]{3^2\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{2}{1}\right)}$$

$$\left[\frac{2}{3}\right] = \frac{2}{3}\sqrt[3]{3\cdot 1\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Korollar 3

§4711 Für den Fall $n = 4$ werden wir diese drei Reduktionen erhalten

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \hline 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\sqrt[4]{4^3\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{1}\right)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ \hline 4 \end{bmatrix} = \frac{2}{4}\sqrt[4]{4^2\cdot 2\left(\frac{2}{2}\right)^2\left(\frac{4}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt[2]{4\left(\frac{2}{2}\right)}$$

wegen $\left(\frac{4}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ \hline 4 \end{bmatrix} = \frac{3}{4}\sqrt[4]{4\cdot 1\cdot 2\left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}$$

weil in der Mitte $\left(\frac{2}{2}\right) = \left(\frac{2}{4-2}\right) = \frac{\pi}{4}$ ist, wird natürlich wie zuvor sein

$$\begin{bmatrix} 2 \\ \hline 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \hline 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Korollar 4

§4811 Es sein nun $n = 5$ und es gehen diese vier Reduktionen hervor

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \hline 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\sqrt[5]{5^4\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{1}\right)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ \hline 5 \end{bmatrix} = \frac{2}{5}\sqrt[5]{5^3\cdot 1\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ \hline 5 \end{bmatrix} = \frac{3}{5}\sqrt[5]{5^2\cdot 1\cdot 2\left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ \hline 5 \end{bmatrix} = \frac{4}{5}\sqrt[5]{5\cdot 1\cdot 2\cdot 3\left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}$$

Korollar 5

§4911 Es sei $n = 6$ und wir werden diese Reduktionen haben

$$\left[\frac{1}{6}\right] = \frac{1}{6}\sqrt[6]{6^5\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{5}{1}\right)}$$

$$\left[\frac{2}{6}\right] = \frac{2}{6}\sqrt[6]{6^4\cdot 2\left(\frac{2}{2}\right)^2\left(\frac{4}{2}\right)^2\left(\frac{6}{2}\right)} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{6^2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{2}\right)}$$

$$\left[\frac{3}{6}\right] = \frac{3}{6}\sqrt[6]{6^3\cdot 3\cdot 3\left(\frac{3}{3}\right)^3\left(\frac{6}{3}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt[2]{6\left(\frac{3}{3}\right)}$$

$$\left[\frac{4}{6}\right] = \frac{4}{6}\sqrt[6]{6^2\cdot 2\cdot 4\cdot 2\left(\frac{4}{4}\right)^2\left(\frac{2}{4}\right)^2\left(\frac{6}{4}\right)} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{6\cdot 2\left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{2}{4}\right)}$$

$$\left[\frac{5}{6}\right] = \frac{5}{6}\sqrt[6]{6\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\left(\frac{5}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)}$$

Korollar 6

§5011 Nach Setzen von $n = 7$ gehen die folgenden sechs Gleichungen hervor

$$\left[\frac{1}{7}\right] = \frac{1}{7}\sqrt[7]{7^6\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{5}{1}\right)\left(\frac{6}{1}\right)}$$

$$\left[\frac{2}{7}\right] = \frac{2}{7}\sqrt[7]{7^5\cdot 1\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{2}\right)}$$

$$\left[\frac{3}{7}\right] = \frac{3}{7}\sqrt[7]{7^4\cdot 1\cdot 2\left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{6}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)}$$

$$\left[\frac{4}{7}\right] = \frac{4}{7}\sqrt[7]{7^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{6}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$\left[\frac{5}{7}\right] = \frac{5}{7}\sqrt[7]{7^2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\left(\frac{5}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)}$$

$$\left[\frac{6}{7}\right] = \frac{6}{7}\sqrt[7]{7\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\left(\frac{6}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)}$$

Korollar 7

§5111 Es sei $n = 8$ und es werden diese sieben Reduktionen erhalten werden

$$\left[\frac{1}{8}\right] = \frac{1}{8}\sqrt[8]{8^7\binom{1}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{7}{1}}$$

$$\left[\frac{2}{8}\right] = \frac{1}{8}\sqrt[8]{8^6\cdot 2\binom{2}{2}^2\binom{4}{2}^2\binom{6}{2}^2\binom{8}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt[4]{8^3\binom{2}{2}\binom{4}{2}\binom{6}{2}}$$

$$\left[\frac{3}{8}\right] = \frac{3}{8}\sqrt[8]{8^5\cdot 1\cdot 2\binom{3}{3}\binom{6}{3}\binom{1}{3}\binom{4}{3}\binom{7}{3}\binom{2}{3}\binom{5}{3}}$$

$$\left[\frac{4}{8}\right] = \frac{4}{8}\sqrt[8]{8^4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\binom{4}{4}^4\binom{8}{4}^3} = \frac{1}{2}\sqrt[2]{8\binom{4}{4}}$$

$$\left[\frac{5}{8}\right] = \frac{5}{8}\sqrt[8]{8^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\binom{5}{5}\binom{2}{5}\binom{7}{5}\binom{4}{5}\binom{1}{5}\binom{6}{5}\binom{3}{5}}$$

$$\left[\frac{6}{8}\right] = \frac{6}{8}\sqrt[8]{8^2\cdot 4\cdot 2\cdot 6\cdot 4\cdot 2\binom{6}{6}^2\binom{4}{6}^2\binom{2}{6}^2\binom{8}{6}} = \frac{3}{4}\sqrt[4]{8\cdot 2\cdot 4\binom{6}{6}\binom{4}{6}\binom{2}{6}}$$

$$\left[\frac{7}{8}\right] = \frac{7}{8}\sqrt[8]{8\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\binom{7}{7}\binom{6}{7}\binom{5}{7}\binom{4}{7}\binom{3}{7}\binom{2}{7}\binom{1}{7}}$$

Bemerkung

§5211 Es wäre überflüssig, diese Fälle weiter zu entwickeln, weil aus den angeführten Dingen die Struktur dieser Formeln zur Genüge erkannt wird. Wenn nämlich in der vorgelegten Formel $\left[\frac{m}{n}\right]$ die Zahlen m und n zueinander prime Zahlen sind, ist das Bildungsgesetz klar, weil wird

$$\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{m}{n}\sqrt[n]{n^{n-m}\cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (m-1)\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)\ldots\left(\frac{n-1}{m}\right)}$$

wenn aber diese Zahlen m und n einen gemeinsamen Teiler haben, wird es freilich zuträglich sein, das der Bruch $\frac{m}{n}$ auf die kleinste Form zurückgeführt wird und aus den vorhergehenden Fällen der gesuchte Wert hergeholt wird; dennoch wird indes die Operation auch auf diese Weise durchgeführt werden können. Weil der gesuchte Ausdruck gewiss diese Form

$$\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{m}{n}\sqrt[n]{n^{n-m}PQ}$$

wo Q ein Produkt aus $n-1$ Integralformeln ist, P hingegen ein Produkt aus einigen absoluten Zahlen, werde zuerst für das Finden jenes Produktes Q diese Reihe an Formeln $\left(\frac{m}{m}\right)\left(\frac{2m}{m}\right)\left(\frac{3m}{m}\right)$ etc. fortgesetzt, bis der Zähler den Exponenten n überragt, und an seiner Stelle werde der Übertrag über n geschrieben; wenn dieser $= \alpha$ gesetzt wird, dass nun unsere Formel $\left(\frac{\alpha}{m}\right)$ ist, wird dieser Zähler α selbst einen Faktor des Produktes P geben; dann werde daher weiter die Reihe der Formeln $\left(\frac{\alpha}{m}\right)\left(\frac{\alpha+m}{m}\right)\left(\frac{\alpha+2m}{m}\right)$ etc. festgesetzt, bis schließlich wiederum zu einem Zähler größer als der Exponent n gelangt wird und die Formel $\left(\frac{n+\beta}{m}\right)$ hervorgeht, an dessen Stelle $\left(\frac{\beta}{n}\right)$ geschrieben werden muss, und zugleich werde daher der Faktor β in das Produkt P eingebracht und so wird es gefällig sein fortzuschreiten, bis schließlich für Q $n-1$ Formeln hervorgegangen sein werden.

Damit diese Operationen leichter eingesehen werden, wollen wir den Fall der Formel

$$\left[\frac{9}{12}\right] = \frac{9}{12}\sqrt[12]{12^3PQ}$$

auf diese Weise entwickeln, wo die Untersuchung der Buchstaben Q und P so unternommen werden wird:
Für Q $\left(\frac{9}{9}\right)\left(\frac{6}{9}\right)\left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{12}{9}\right)\left(\frac{9}{9}\right)\left(\frac{6}{9}\right)\left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{12}{9}\right)\left(\frac{9}{9}\right)\left(\frac{6}{9}\right)\left(\frac{3}{9}\right)$
Für P $6 \cdot 39 \cdot 6 \cdot 39 \cdot 6 \cdot 3$ und so wird aufgefunden

$$P = \left(\frac{9}{9}\right)^3\left(\frac{6}{9}\right)^3\left(\frac{3}{9}\right)^3\left(\frac{12}{9}\right)^3 \quad \text{und} \qquad Q = 6^3 \cdot 3^3 \cdot 9^2$$

weil also $\left(\frac{12}{9}\right) = \frac{1}{9}$ ist, wird $PQ = 6^3 \cdot 3^3 \left(\frac{9}{9}\right)^3\left(\frac{6}{9}\right)^3\left(\frac{3}{9}\right)^3$ und daher

$$\left[\frac{9}{12}\right] = \frac{3}{4}\sqrt[4]{12 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \left(\frac{9}{9}\right)\left(\frac{6}{9}\right)\left(\frac{3}{9}\right)}$$

Theorem

§5311 Welche ganzen positiven Zahlen mit den Buchstaben m und n auch immer bezeichnet werden, es wird immer auf die zuvor dargelegte Bezeichnungsweise sein

$$\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{m}{n}\sqrt[n]{n^{n-m} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m-1)\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)\ldots\left(\frac{n-1}{m}\right)}$$

Beweise

Für den Fall, indem m und n zueinander prime Zahlen sind, ist die Gültigkeit des Theorems im Vorhergehenden aufgezeigt worden; dass es aber auch Geltung hat, wenn sich jene Zahlen m und n einem gemeinsamen Teiler erfreuen, ist daher freilich nicht klar; aber aus diesem selbst, weil für die Fälle, in denen m und n prime Zahlen sind, die Gültigkeit bekannt ist, ist es möglich, sicher zu folgern, dass das Theorem im Allgemeinen wahr ist. Ich leugne es freilich keineswegs, dass diese Schlussweise völlig einzigartig ist und sehr vielen verdächtig erscheinen muss. Daher, damit kein Zweifel zurückgelassen wird, weil wir ja für die Fälle, in denen die Zahlen m und n einen gemeinsamen Teiler haben, zwei Ausdrücke erhalten haben, wird es förderlich sein, die Übereinstimmung jeder der beiden für die zuvor entwickelten Fälle gezeigt zu haben. Es verschafft aber schon der Fall $m = n$, in welchem Fall unsere Form selbstredend die Einheit hervorbringt, eine ausgezeichnete Stütze.

Korollar 1

§5411 Der erste einen Beweis der Übereinstimmung erfordernde Fall ist der, in dem $m = 2$ und $n = 4$ ist, für welchen wir oben (§47) gefunden haben

$$\left[\frac{2}{4}\right] = \frac{2}{4}\sqrt[4]{4^2\left(\frac{2}{2}\right)^2}$$

nun ist aber vermöge des Theorems

$$\left[\frac{2}{4}\right] = \frac{2}{4}\sqrt[4]{4^2\cdot 1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)}$$

woher nach Anstellen eines Vergleiches wird

$$\left(\frac{2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)$$

dessen Gültigkeit in den oben angeführten Beobachtungen bestätigt worden ist.

Korollar 2

§5511 Wenn $m = 2$ und $n = 6$ ist, ist aus dem Oberen (§49)

$$\left[\frac{2}{6}\right] = \frac{2}{6}\sqrt[6]{6^4\left(\frac{2}{2}\right)^2\left(\frac{4}{2}\right)^2}$$

nun ist in der Tat durch das Theorem

$$\left[\frac{2}{6}\right] = \frac{2}{6}\sqrt[6]{6^4\cdot 1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)}$$

und daher ist es von Nöten, dass ist

$$\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)$$

dessen Gültigkeit ebendaher klar zutage tritt.

Korollar 3

§5611 Wenn $m = 3$ und $n = 6$ ist, wird zu dieser Gleichung gelangt

$$\left(\frac{3}{3}\right)^2 = 1 \cdot 2 \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\right)$$

aber wenn $m = 4$ und $n = 6$ ist, wird auf die gleiche Weise

$$2^2 \left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{2}{4}\right) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\right)$$

oder

$$\left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{2}{4}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\right)$$

was auch als wahr entdeckt wird.

Korollar 4

§5711 Der Fall $m = 2$ und $n = 8$ liefert diese Gleichheit

$$\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right)$$

aber der Fall $m = 4$ und $n = 8$ diese

$$\left(\frac{4}{4}\right)^3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{6}{4}\right)\left(\frac{7}{4}\right)$$

und schließlich der Fall $m = 6$ und $n = 8$ diese

$$2 \cdot 4 \left(\frac{6}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{7}{6}\right)$$

die auch der Wahrheit verträglich sind.

Bemerkung

§5811 Wenn aber im Allgemeinen die Zahlen m und n den gemeinsamen Faktor 2 haben und die vorgelegte Formel $\left[\frac{2m}{2n}\right] = \left[\frac{m}{n}\right]$ ist, weil ist

$$\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{m}{n}\sqrt[n]{n^{n-m}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (m-1)\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)\ldots\left(\frac{n-1}{m}\right)}$$

wird dieselbe auf den Exponenten $2n$ zurückgeführt sein

$$\frac{m}{n}\sqrt[2n]{2n^{2n-2m}\cdot 2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot \ldots \cdot (2m-2)\left(\frac{2}{2m}\right)^2\left(\frac{4}{2m}\right)^2\ldots\left(\frac{2n-2}{2m}\right)^2}$$

Durch das Theorem wird in der Tat derselbe Ausdruck

$$\frac{m}{n}\sqrt[2n]{2n^{2n-2m}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2m-1)\left(\frac{1}{2m}\right)\left(\frac{2}{2m}\right)\left(\frac{3}{2m}\right)\ldots\left(\frac{2n-1}{2m}\right)}$$

woher für den Exponenten $2n$ sein wird

$$\begin{aligned}&2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots(2m-2)\left(\frac{2}{2m}\right)\left(\frac{4}{2m}\right)\left(\frac{6}{2m}\right)\ldots\left(\frac{2n-2}{2m}\right)\\ =&1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2m-1)\left(\frac{1}{2m}\right)\left(\frac{3}{2m}\right)\left(\frac{5}{2m}\right)\ldots\left(\frac{2n-1}{2m}\right)\end{aligned}$$

Wenn auf die gleiche Weise der gemeinsame Teiler 3 ist, wird für den Exponenten $3n$ aufgefunden werden

$$\begin{aligned}&3^2\cdot 6^2\cdot 9^2\ldots(3m-3)^2\left(\frac{3}{3m}\right)^2\left(\frac{6}{3m}\right)^2\left(\frac{9}{3m}\right)^2\ldots\left(\frac{3n-3}{3m}\right)^3\\ =&1\cdot 2\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (3m-2)(3m-1)\left(\frac{1}{3m}\right)\left(\frac{2}{3m}\right)\left(\frac{4}{3m}\right)\left(\frac{5}{3m}\right)\ldots\left(\frac{3n-1}{3m}\right)\end{aligned}$$

welche Gleichung gefälliger dargeboten werden kann

$$\frac{1\cdot 2\cdot 4\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 10\cdot \ldots \cdot (3m-2)(3m-1)}{3^2\cdot 6^2\cdot 9^2\cdot \ldots \cdot (3m-3)^2} = \frac{\left(\frac{3}{3m}\right)^2\left(\frac{6}{3m}\right)^2\ldots\left(\frac{3n-3}{3m}\right)^2}{\left(\frac{1}{3m}\right)\left(\frac{2}{3m}\right)\left(\frac{4}{3m}\right)\left(\frac{5}{3m}\right)\left(\frac{7}{3m}\right)\ldots\left(\frac{3n-2}{3m}\right)\left(\frac{3n-1}{3m}\right)}$$

wenn aber im Allgemeinen der gemeinsame Teiler d und dn ist, wird man haben

$$\begin{aligned}&(d\cdot 2d\cdot 3d\cdot \ldots(dm-d)\left(\frac{d}{dm}\right)\left(\frac{2d}{dm}\right)\left(\frac{3d}{dm}\right)\ldots\left(\frac{dn-d}{dm}\right))^d\\ =&1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (dm-1)\left(\frac{1}{dm}\right)\left(\frac{2}{dm}\right)\left(\frac{3}{dm}\right)\ldots\left(\frac{dn-1}{dm}\right)\end{aligned}$$

welche Gleichung leicht an jegliche Fälle angepasst werden können, woher das folgende Theorem es verdient angemerkt zu werden.

Theorem

§5911 Wenn α der gemeinsame Teiler der Zahlen m und n war und diese Formel $\left(\frac{p}{q}\right)$ den Wert des von $x = 0$ bis hinzu $x = 1$ erstreckten Integrals $\int \frac{x^{p-1}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ bezeichnet, wird sein

$$\begin{aligned}&(\alpha \cdot 2\alpha \cdot 3\alpha \cdot \ldots \cdot (m-\alpha)\left(\frac{\alpha}{m}\right)\left(\frac{2\alpha}{m}\right)\left(\frac{3\alpha}{m}\right)\ldots\left(\frac{n-\alpha}{m}\right))^{\alpha}\\ =&1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (m-1)\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)\ldots\left(\frac{n-1}{m}\right)\end{aligned}$$

Beweis

Aus der vorhergehenden Bemerkung wird die Gültigkeit dieses Theorems erkannt; während nämlich dort der gemeinsame Teiler $= d$ war und die zwei vorgelegten Zahlen dm und dm, habe ich anstelle dieser hier m und n geschrieben, anstelle deren Teilers d aber den Buchstaben α, welche Art des Teilers die ausgesprochene Gleichheit so umfasst, dass in der fortgesetzten arithmetischen Progression $\alpha, 2\alpha, 3\alpha etc.$ die Zahlen m und n selbst und daher auch $m - \alpha$ und $n - \alpha$ aufzutreten angenommen werden. Im Übrigen bin ich gezwungen zu gestehen, dass dieser natürlich hauptsächlich auf Induktion gestützte Beweis keinesfalls für streng gehalten werden kann; weil wir aber nichtsdestoweniger von seiner Gültigkeit überzeugt sind, scheint dieses Theorem umso größerer Aufmerksamkeit würdig; dennoch besteht indes kein Zweifel, dass eine umfassendere Entwicklung von Integralformeln dieser Art schließlich einen vollständigen Beweis schenken wird; weil es uns aber schon zuvor möglich gewesen ist, diese Wahrheit zu erkennen, zeigt sich daher ein vortreffliches Beispiel einer analytischen Untersuchung.

Korollar 1

§6011 Wenn wir anstelle der verwendeten Zeichen die Integralformeln selbst einsetzen, wird sich unser Theorem so verhalten, dass ist

$$\alpha \cdot 2\alpha \cdot 3\alpha ... (m-\alpha) \int \frac{x^{\alpha-1}\,\mathrm{dx}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}} \int \frac{x^{2\alpha-1}\,\mathrm{dx}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}} ... \int \frac{x^{n-\alpha-1}\,\mathrm{dx}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}}$$

$$= \sqrt[\alpha]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (m-1) \int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}} \int \frac{x\,\mathrm{dx}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}} ... \int \frac{x^{n-2}\,\mathrm{dx}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-m}}}}$$

Korollar 2

§6111 Oder wenn wir zur Abkürzung $\sqrt[n]{(1-x^n)^{m-n}} = X$ setzen, wird sein

$$\alpha \cdot 2\alpha \cdot 3\alpha ... (m-\alpha) \int \frac{x^{\alpha-1}\,\mathrm{dx}}{X} \int \frac{x^{2\alpha-1}\,\mathrm{dx}}{X} ... \int \frac{x^{n-\alpha-1}\,\mathrm{dx}}{X} = \sqrt[\alpha]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (m-1) \int \frac{\mathrm{dx}}{X} \int \frac{x\,\mathrm{dx}}{X} \int \frac{x^2}{X}$$

Allgemeines Theorem

§6211 Wenn die gemeinsamen Teiler der zwei Zahlen m und n $\alpha, \beta, \gamma etc.$ sind und die Formel $\left(\frac{p}{q}\right)$ den Wert des von $x = 0$ bis $x = 1$ erstreckten Integral $\int \frac{x^{p-1}\,\mathrm{dx}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{p-q}}}$, werden die folgenden aus Integralformeln dieser Art gebildeten Ausdrücke einander gleich sind

$$\begin{aligned}
&(\alpha \cdot 2\alpha \cdot 3\alpha \cdot ... \cdot (m-\alpha)\left(\frac{\alpha}{m}\right)\left(\frac{2\alpha}{m}\right)\left(\frac{3\alpha}{m}\right)...\left(\frac{n-\alpha}{m}\right))^{\alpha} \\
=&(\beta \cdot 2\beta \cdot 3\beta \cdot ... \cdot (m-\beta)\left(\frac{\beta}{m}\right)\left(\frac{2\beta}{m}\right)\left(\frac{3\beta}{m}\right)...\left(\frac{n-\beta}{m}\right))^{\beta} \\
=&(\gamma \cdot 2\gamma \cdot 3\gamma \cdot ... \cdot (m-\gamma)\left(\frac{\gamma}{m}\right)\left(\frac{2\gamma}{m}\right)\left(\frac{3\gamma}{m}\right)...\left(\frac{n-\gamma}{m}\right))^{\gamma} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Beweis

Aus dem vorhergehenden Theorem folgt die Gültigkeit von diesem offenbar, weil jeder beliebige dieser Ausdrücke einzeln diesem gleich wird

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (m-1)\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)...\left(\frac{n-1}{m}\right)$$

welcher der Einheit, natürlich dem kleinsten gemeinsamen Teiler der Zahlen m und n, entspricht. Es können also so viele einander gleiche Ausdrücke dieser Art dargeboten werden, wie es gemeinsame Teiler der zwei Zahlen m und n gab.

Korollar 1

§6311 Weil diese Formel $\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{1}{m}$ und daher $m\left(\frac{n}{m}\right) = 1$ ist, können unsere gleichen Ausdrücke kürzer auf diese Weise dargestellt werden

$$
\begin{aligned}
&(\alpha \cdot 2\alpha \cdot 3\alpha \cdot \ldots \cdot m\left(\frac{\alpha}{m}\right)\left(\frac{2\alpha}{m}\right)\left(\frac{3\alpha}{m}\right)\ldots\left(\frac{n}{m}\right))^{\alpha}\\
=&(\beta \cdot 2\beta \cdot 3\beta \cdot \ldots \cdot m\left(\frac{\beta}{m}\right)\left(\frac{2\beta}{m}\right)\left(\frac{3\beta}{m}\right)\ldots\left(\frac{n}{m}\right))^{\beta}\\
=&(\gamma \cdot 2\gamma \cdot 3\gamma \cdot \ldots \cdot m\left(\frac{\gamma}{m}\right)\left(\frac{2\gamma}{m}\right)\left(\frac{3\gamma}{m}\right)\ldots\left(\frac{n}{m}\right))^{\gamma}
\end{aligned}
$$

Auch wenn nämlich hier die Anzahl der Faktoren vermehrt worden ist, fällt dennoch die Zusammensetzungsart leichter ins Auge.

Korollar 2

§6411 Wenn also $m = 6$ und $n = 12$ ist, wird man wegen der gemeinsamen Teiler $6, 3, 2, 1$ dieser Zahlen die folgenden einander gleichen Formen haben

$$
\begin{aligned}
&(6\left(\frac{6}{6}\right)\left(\frac{12}{6}\right))^{0} = (3 \cdot 6\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{6}{6}\right)\left(\frac{9}{6}\right)\left(\frac{12}{6}\right))^{3}\\
=&(2 \cdot 4 \cdot 6\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{6}{6}\right)\left(\frac{8}{6}\right)\left(\frac{10}{6}\right)\left(\frac{12}{6}\right))^{2}\\
=&1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)\ldots\left(\frac{12}{6}\right)
\end{aligned}
$$

Korollar 3

§6511 Wenn die letzte mit der vorletzten kombiniert wird, wird diese Gleichung entstehen

$$
\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{6}{6}\right)\left(\frac{8}{6}\right)\left(\frac{10}{6}\right)\left(\frac{12}{6}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{7}{6}\right)\left(\frac{9}{6}\right)\left(\frac{11}{6}\right)}
$$

die letzte mit der vorletzten verglichen liefert aber

$$\frac{1\cdot 2\cdot 4\cdot 5}{3\cdot 3\cdot 6\cdot 6}=\frac{\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{6}{6}\right)\left(\frac{6}{6}\right)\left(\frac{9}{6}\right)\left(\frac{9}{6}\right)\left(\frac{12}{6}\right)\left(\frac{12}{6}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{7}{6}\right)\left(\frac{8}{6}\right)\left(\frac{10}{6}\right)\left(\frac{11}{6}\right)}$$

Bemerkung

§6611 Es folgen also daher unendlich viele Relationen zwischen den Integralformeln der Form

$$\int \frac{x^{p-1}\,\mathrm{dx}}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}=\left(\frac{p}{q}\right)$$

die umso mehr des Merkens würdig ist, weil wir mit einer völlig einzigartigen Methode hier zu ihnen geführt worden sind. Und wenn jemand über deren Gültigkeit noch zweifelt, ziehe er meine Beobachtungen über diese Integralformeln zu Rate und wird daher für jeden sich zeigenden Fall von der Gültigkeit leicht überzeugt werden. Auch wenn aber jene Behandlung für das Bestätigen von diesem dient, sind dennoch die hier gefundenen Relationen von umso größerer Bedeutung, weil in ihnen eine gewisse Struktur wahrgenommen wird und sie durch alle Klassen hindurch, wie groß auch immer es gefällt den Exponenten n anzunehmen, in einer leichten Aufgabe fortgesetzt werden, in der ersten Behandlung hingegen die Rechnung für höhere Klassen immer aufwendiger und verwickelter wird.

Ergänzung

die den Beweis des in §53 vorgelegten Theorems

Es ist gefällig, dass diesem Beweis weiter nachgegangen wird; es werde näturlich die in §25 gegebene Gleichung genommen, die nach Festlegung von $f=1$ und Ändern der Buchstaben ist

$$\frac{\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{\gamma-1}\cdot\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{\mu-1}}{\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{\mu-\gamma-1}}=\chi\int\frac{x^{\chi\mu-1}\,\mathrm{dx}}{(1-x^{\chi})^{1-\gamma}}$$

und diese werde durch bekannte Reduktionen in dieser Form dargestellt

$$\frac{\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{\gamma}\cdot\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{\mu}}{\int \mathrm{dx}(ln\frac{1}{x})^{\mu+\gamma}}=\frac{\chi\mu\gamma}{\mu+\gamma}\int\frac{x^{\chi\mu-1}\,\mathrm{dx}}{(1-x^{\chi})^{1-\gamma}}$$

Es werde nun $\gamma = \frac{m}{n}$ und $\mu = \frac{\lambda}{n}$ genommen, dann aber $\chi = n$, dass wir haben

$$\frac{\int dx(ln\frac{1}{x})^{\frac{m}{n}} \cdot \int dx(ln\frac{1}{x})^{\frac{\lambda}{n}}}{\int dx(ln\frac{1}{x})^{\frac{\lambda+m}{n}}} = \frac{\lambda m}{\lambda + m}\int \frac{x^{\lambda-1}\,dx}{\sqrt[\chi]{(1-x^n)^{m-n}}}$$

die der Kürze wegen auf die oben gebrauchte Weise gefällig so dargestellt werde

$$\frac{\left[\frac{m}{n}\right]\left[\frac{\lambda}{n}\right]}{\left[\frac{\lambda+m}{n}\right]} = \frac{\lambda m}{\lambda + m}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$$

Nun werden anstelle von λ nacheinander die Zahlen $1, 2, 3, 4, ..., n$ geschrieben und alle diese Gleichungen, deren Anzahl $= n$ ist, miteinander multipliziert und die resultierende Gleichung wird sein

$$\begin{aligned}&\left[\frac{m}{n}\right]^n \frac{\left[\frac{1}{n}\right]\left[\frac{2}{n}\right]\left[\frac{3}{n}\right]...\left[\frac{n}{n}\right]}{\left[\frac{m+1}{n}\right]\left[\frac{m+2}{n}\right]\left[\frac{m+3}{n}\right]...\left[\frac{m+n}{n}\right]}\\ =&m^n\frac{1}{m+1}\cdot\frac{2}{m+2}\cdot\frac{3}{m+3}...\frac{n}{m+n}\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)...\left(\frac{n}{m}\right)\\ =&m^n\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot m}{(n+1)(n+2)(n+3)...(n+m)}\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)...\left(\frac{n}{m}\right)\end{aligned}$$

Auf die gleiche Weise werde aber der erste Teil transformiert, dass er ist

$$\left[\frac{m}{n}\right]^n \frac{\left[\frac{1}{n}\right]\left[\frac{2}{n}\right]\left[\frac{3}{n}\right]...\left[\frac{m}{n}\right]}{\left[\frac{n+1}{n}\right]\left[\frac{n+2}{n}\right]\left[\frac{n+3}{n}\right]...\left[\frac{n+m}{n}\right]}$$

deren Übereinstimmung mit der vorhergehenden, indem über Kreuz multipliziert wird, wie sie versichern, sich von selbst zeigt. Weil in der Tat aus der Natur dieser Formel ist

$$\left[\frac{n+1}{n}\right] = \frac{n+1}{n}\left[\frac{1}{n}\right], \qquad \left[\frac{n+2}{n}\right] = \frac{n+2}{n}\left[\frac{2}{n}\right], \qquad \left[\frac{n+3}{n}\right] = \frac{n+3}{n}\left[\frac{3}{n}\right] \text{ etc.}$$

etc. wird wegen der Anzahl $= m$ dieser Formeln dieser erste Teil werden

$$\left[\frac{m}{n}\right]^n = \frac{n^m}{(n+1)(n+2)(n+3)...(n+m)}$$

weil dieser dem anderen zuvor dargebotenen Teil gleich ist

$$m^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot m}{(n+1)(n+2)(n+3)...(n+m)} \left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)...\left(\frac{n}{m}\right)$$

erhalten wir diese Gleichung

$$\left[\frac{m}{n}\right]^n = \frac{m^n}{n^m} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot m \left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)...\left(\frac{n}{m}\right)$$

sodass ist

$$\left[\frac{m}{n}\right] = m \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot m}{n^m} \left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)...\left(\frac{n}{m}\right)}$$

die mit der in §53 vorgelegten wegen $\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{1}{m}$ ganz und gar übereinstimmt, woher ihre Gültigkeit nun freilich aus gewissesten Prinzipien aufgezeigt worden ist.

Beweis

des in §59 vorgelegten Theorems

Auch dieses Theorem bedarf eines strengeren Beweises, welchen ich aus der zuvor aufgestellten Gleichheit

$$\frac{\left[\frac{m}{n}\right]\left[\frac{\lambda}{n}\right]}{\left[\frac{\lambda+m}{n}\right]} = \frac{\lambda m}{\lambda + m}\left(\frac{\lambda}{m}\right)$$

so führe. Während α der gemeinsame Teiler der Zahlen m und n ist, werden anstelle von λ nacheinander die Zahlen $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, etc.$ bis hin zu n geschrieben, deren Menge $= \frac{n}{\alpha}$ ist, und alle auf diese Weise resultierenden Gleichheiten werden miteinander multipliziert, dass diese Gleichung hervorgeht

$$\left[\frac{m}{n}\right]^{\frac{n}{\alpha}} \frac{\left[\frac{\alpha}{n}\right]\left[\frac{2\alpha}{n}\right]\left[\frac{3\alpha}{n}\right]...\left[\frac{n}{n}\right]}{\left[\frac{m+\alpha}{n}\right]\left[\frac{m+2\alpha}{n}\right]\left[\frac{m+3\alpha}{n}\right]...\left[\frac{m+n}{n}\right]}$$
$$= m^{\frac{n}{\alpha}} \frac{\alpha}{m+\alpha} \frac{2\alpha}{m+2\alpha} \frac{3\alpha}{m+3\alpha} ... \frac{n}{m+n} \left(\frac{\alpha}{m}\right)\left(\frac{2\alpha}{m}\right)\left(\frac{3\alpha}{m}\right)...\left(\frac{n}{m}\right)$$

Nun werde der erste Teil in diese selbigem gleiche Form verwandelt

$$\left[\frac{m}{n}\right]^{\frac{n}{\alpha}} \frac{\left[\frac{\alpha}{n}\right]\left[\frac{2\alpha}{n}\right]\left[\frac{3\alpha}{n}\right]...\left[\frac{m}{n}\right]}{\left[\frac{n+\alpha}{n}\right]\left[\frac{n+2\alpha}{n}\right]\left[\frac{n+3\alpha}{n}\right]...\left[\frac{n+m}{n}\right]}$$

die wegen $\left[\frac{n+\alpha}{n}\right] = \frac{n+\alpha}{n}\left[\frac{\alpha}{n}\right]$ und so über die Übrigen auf diese zurückgeführt wird

$$\left[\frac{m}{n}\right]^{\frac{n}{\alpha}} \cdot \frac{n+\alpha}{n} \cdot \frac{n+2\alpha}{n} \cdot \frac{n+3\alpha}{n} ... \frac{n}{n+m}$$

Der zweite Teil der Gleichung wird hingegen auf die gleiche Weise transformiert in

$$m^{\frac{n}{\alpha}} \frac{\alpha}{n+\alpha} \frac{2\alpha}{n+2\alpha} \frac{3\alpha}{n+3\alpha} ... \frac{n}{n+m} \left(\frac{\alpha}{m}\right)\left(\frac{2\alpha}{m}\right)\left(\frac{3\alpha}{m}\right)...\left(\frac{n}{m}\right)$$

woher diese Gleichung entsteht

$$\left[\frac{m}{n}\right]^{\frac{n}{\alpha}} n^{\frac{m}{\alpha}} = m^{\frac{n}{\alpha}} \alpha \cdot 2\alpha \cdot 3\alpha ... m \left(\frac{\alpha}{m}\right)\left(\frac{2\alpha}{m}\right)\left(\frac{3\alpha}{m}\right)...\left(\frac{n}{m}\right)$$

und daher

$$\left[\frac{m}{n}\right] = m \sqrt[n]{\frac{1}{n^m}(\alpha \cdot 2\alpha \cdot 3\alpha ... \cdot m \left(\frac{\alpha}{m}\right)\left(\frac{2\alpha}{m}\right)\left(\frac{3\alpha}{m}\right)...\left(\frac{n}{m}\right))^{\alpha}}$$

welcher Ausdruck mit dem vorhergehenden verglichen diese Gleichung liefert

$$(\alpha \cdot 2\alpha \cdot 3\alpha ... \cdot m \left(\frac{\alpha}{m}\right)\left(\frac{2\alpha}{m}\right)\left(\frac{3\alpha}{m}\right)...\left(\frac{n}{m}\right))^{\alpha} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot m \left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{3}{m}\right)...\left(\frac{n}{m}\right)$$

was über alle gemeinsamen Teiler der zwei Zahlen m und n zu verstehen ist.